Rappel : Géometrie.

Def : (Espace affine), Soit $\vec{E}$ e. vectoriel

on dit que $\mathcal{E}$ un espace affine ssi :

1)- $\forall A, B \in \mathcal{E}$: $\vec{AB} \in \vec{E}$

2)- $\forall$ A, B et C : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Remarque ① l'espace $\vec{E}$ s'appel le directeur de $\mathcal{E}$

② Si on fixe le point $O \in \mathcal{E}$ (origine) on a :

$$\phi_0 : \mathcal{E} \longrightarrow \vec{E}$$
$$M \longrightarrow \phi_0(M) = \vec{OM}$$ est une bijection.

* يمكننا قول أن الفضاء التآلفي ذكل بنية شعاعية لكن هذه البنية ليست طبيعية و لا قانونية لأنها تعتمد على النقطة O (المبدأ).

* لهذا يمكن اعتبار دائما فضاءا تآلفي كفضاء شعاعي مع نقطة.

Exemple :

① $\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 = \left\{ (x, y) \;/\; \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$

esp-affine sur $\vec{E} = \vec{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$.

② tout esp-vectoriel admet une ~~espace~~ structure d'un espace affine.

Def : (Sous esp-affine) Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'un esp-affine $\mathcal{E}$ $(\mathcal{F} \subset \mathcal{E})$.

on dit que $\mathcal{F}$ un Sous esp-affine de $\mathcal{E}$ si pour certain point $A \in \mathcal{F}$ l'ensemble :

$\vec{F} = \{ \vec{AM}, M \in \mathcal{F} \}$ forme un sous-esp-vectoriel de $\vec{E}$

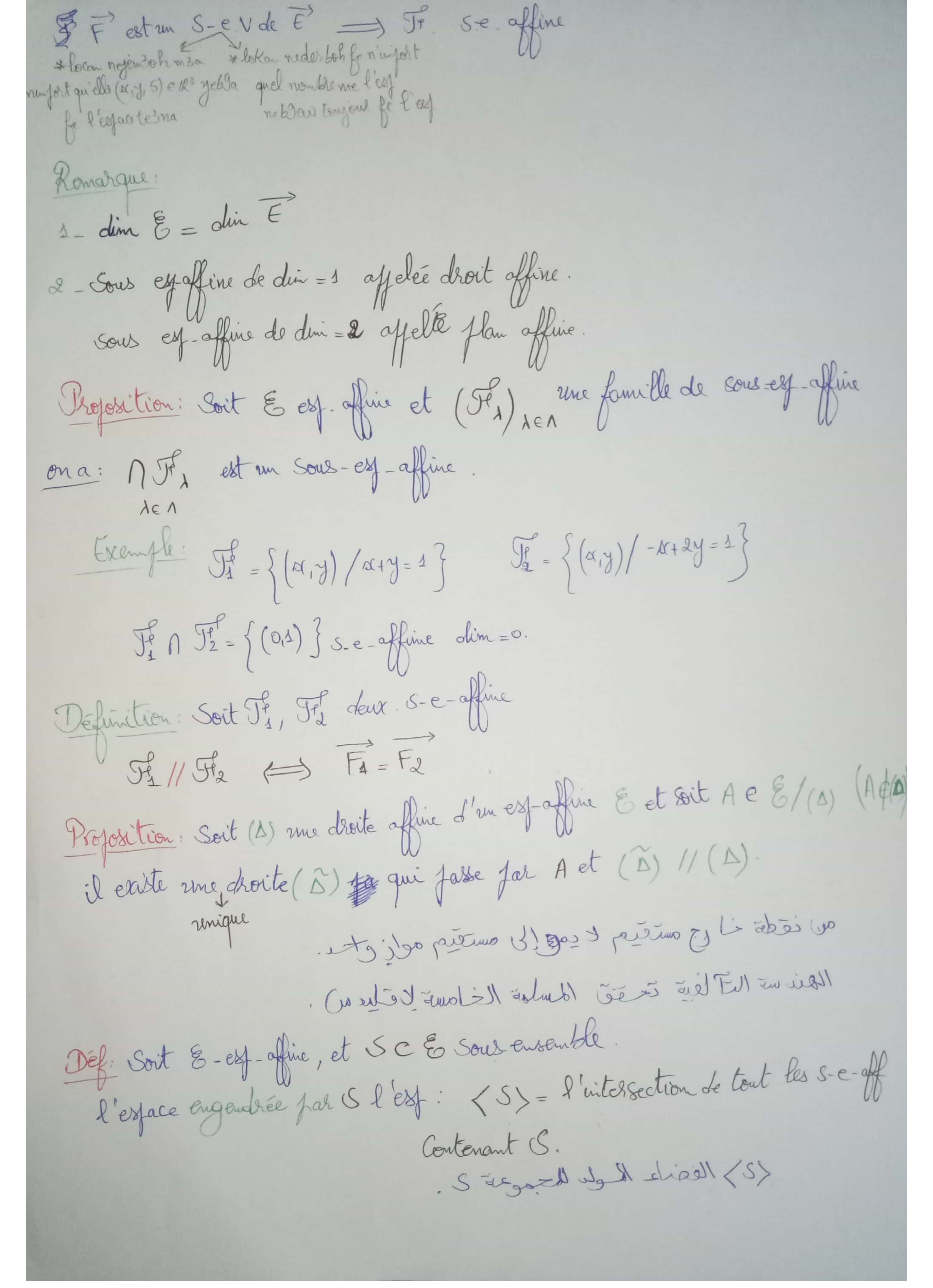
Exemple : $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \;/\; x, y, z \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{F} = \{ (x, y, 5) \;/\; x, y \in \mathbb{R} \}$.

on a : $A = (0, 0, 5) \in \mathcal{F}$

$\vec{F} = \{ \vec{AM}, M \in \mathcal{F} \} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

①'



$\overrightarrow{F}$ est un S-e.V de $\overrightarrow{E}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ S.e. affine

* locan ngém3oh m3a n'importe qu'elle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ yeb9a fe l'espace te3na
* lokan nederboh fe n'importe quel nombre me l'esf neb9aw toujours fe l'esf

Remarque :

1 – $\dim \mathcal{E} = \dim \overrightarrow{E}$

2 – Sous esf-affine de dim = 1 appelée droit affine.

Sous esf-affine de dim = 2 appelé plan affine.

Proposition : Soit $\mathcal{E}$ esf. affine et $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de sous-esf-affine

on a : $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ est un sous-esf-affine.

Exemple : $\mathcal{F}_1 = \{(x, y) / x + y = 1\}$ $\quad$ $\mathcal{F}_2 = \{(x, y) / -x + 2y = 1\}$

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{(0, 1)\}$ s-e-affine dim = 0.

Définition : Soit $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ deux s-e-affine

$\mathcal{F}_1 \,//\, \mathcal{F}_2 \iff \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$

Proposition : Soit (Δ) une droite affine d'un esf-affine $\mathcal{E}$ et soit $A \in \mathcal{E}/(\Delta)$ $(A \notin \Delta)$

il existe une droite $(\tilde{\Delta})$ (unique) qui passe par A et $(\tilde{\Delta}) \,//\, (\Delta)$.

من نقطة خارج مستقيم لا يمر إلى مستقيم موازٍ واحد.

الهندسة التآلفية تحقق المسلمة الخامسة لإقليدس.

Déf : Soit $\mathcal{E}$ - esf - affine, et $S \subset \mathcal{E}$ sous ensemble.

l'espace engendrée par S l'esf : $\langle S \rangle$ = l'intersection de tout les s-e-aff contenant S.

$\langle S \rangle$ الفضاء المولد لمجموعة S.

Déf : Soit $(n+1)$ points $A_0, A_1 \dots A_n$ d'un esp-affine $\mathcal{E}$.

on dit que ces points sont affinement indépendant si :

$$\dim \langle \{A_0, A_1 \dots A_n\} \rangle = n.$$

Si $\dim \mathcal{E} = n$:

$\{A_0, A_1 \dots A_n\}$ base affine de $\mathcal{E} \iff \{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ base vectoriel de $\overrightarrow{E}$

$\iff \{A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} \dots \overrightarrow{A_0A_n}\}$ un Repère Cartésien.

Remarque :

$\{A_0, A_1, \dots A_n\}$ base affine de $\mathcal{E} \iff \{A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ repère Cartésien.

Donc : $\forall M \in \mathcal{E} : \exists! (x_1, \dots x_n)$ tq : $\overrightarrow{A_0M} = \sum x_i \overrightarrow{A_0A_i}$

$(x_1 \dots x_n)$ s'appelle Coordonnée Cartésien.

Déf : (Coordonnée barycentrique) :

Dans un repère affine d'un esp affine $\mathcal{E}$: on a :

$\forall M \in \mathcal{E} : \exists! \lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \qquad M = \text{barycentre} \{(A_i, \lambda_i) ; i = \overline{0,n}\}.$$

$(\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n)$ s'appelle Coordonnée barycentrique.

$1 = x + y$
$1 - x - y = 0$
$1 - 2 - \frac{3}{2} = \frac{-5}{2}$

coordonnée cartésien	VS coordonnée barycentrique
$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2, (O, I, J)$; $M(2, \frac{3}{2})$; J, O, I	$M(\frac{-5}{2}, 2, \frac{3}{2})$; J, O, I

app - affine :

Déf (1) Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux esp-affine et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, $M \longrightarrow f(M)$ app.

on dit que f app-affine s'il existe une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$

tq : $\forall M, N \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$.

Déf (2) : (même supposition) :

$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ app-aff : si il existe $\vec{f} : \vec{E} \xrightarrow{\text{linéaire}} \vec{F}$ tq :

pour certain point $O \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$ $\forall M \in \mathcal{E}$

Déf (1) $\Leftrightarrow$ Déf (2).

$\vec{f}$ partie linéaire de f.

Exemple : $f : \mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{E}$, $M \longrightarrow f(M)$ tq : $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$, $\forall M \in \mathcal{E}$.

f est-elle une application affine ?

Soit $M, N \in \mathcal{E}$:

$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nf(N)} = -\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$

$= 4\overrightarrow{MN} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$ tq $\vec{f}(\vec{u}) = 4\vec{u}$ $\vec{f}$ est linéaire

$\vec{f} : \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$, $\vec{v} \longrightarrow \vec{f}(\vec{v}) = 4\vec{v}$.

puisque $\vec{f} = 4\, Id_E$ linéaire

Donc f app-affine.

Théorème : (Caractérisation).

$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ application affine ssi : f conserve les barycentre.

Si $G = bary \{ (A, \alpha) ; (B, \beta) \}$. alors : $f(G) = bary \{ (f(A), \alpha) ; (f(B), \beta) \}$

تطبيق تآلفي إذا يحافظ على المرجح . f

Démonstration : (TD).

Proposition : l'image direct (resp : l'image Réciproque) d'un sous-esp aff par une application affine est un s-esp-affine

Corolaire : Tout application-affine conserve l'alignement et le parallélisme

(كل التطبيقات التآلفية تحافظ على الإستقامية والتوازي).

Proposition :

$(\mathcal{E}, R(O, B))$ esp-affine avec R repère, d'origine O et B base de $(e_1 - - - e_n)$ dim n

$(\mathcal{E}', R'(O', B'))$ esp affine avec R' repère, O' origine , B' base de dim m

et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ app-affine.

$M \longrightarrow f(M)$.

Les coordonnée de $f(M)$ dans $R'(O', B')$ sont données par la forme :

$Y = AX + B$ $\quad (\overrightarrow{Of(M)} = A\overrightarrow{OM} + \vec{B})$ $\quad$ tq. $Y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ coordonnée de $f(M)$.

$X\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Coordonné de M.

$A = Mat(\vec{f}, B, B')$ et $B = f(0)$

Déf : Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un aff-aff

on dit que f est une homothetie si il y a $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tq.

$$\vec{f} = \lambda \, Id_{\vec{E}}$$

On a : Si $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$ (et $f \neq id_{\mathcal{E}}$) alors f est une translation.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longrightarrow (x', y') = f(x, y) = (2x + 3 ; 2y - 1)$.

On a : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 \\ 2y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{f}(x, y)} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

~~$\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$~~ $\Longrightarrow f$ est une ~~homothetie~~ homothetie.

$f = \boxed{AX} + b$ nchofo la partie linéaire ida Kant mo dacle $Id_E \times \lambda$.

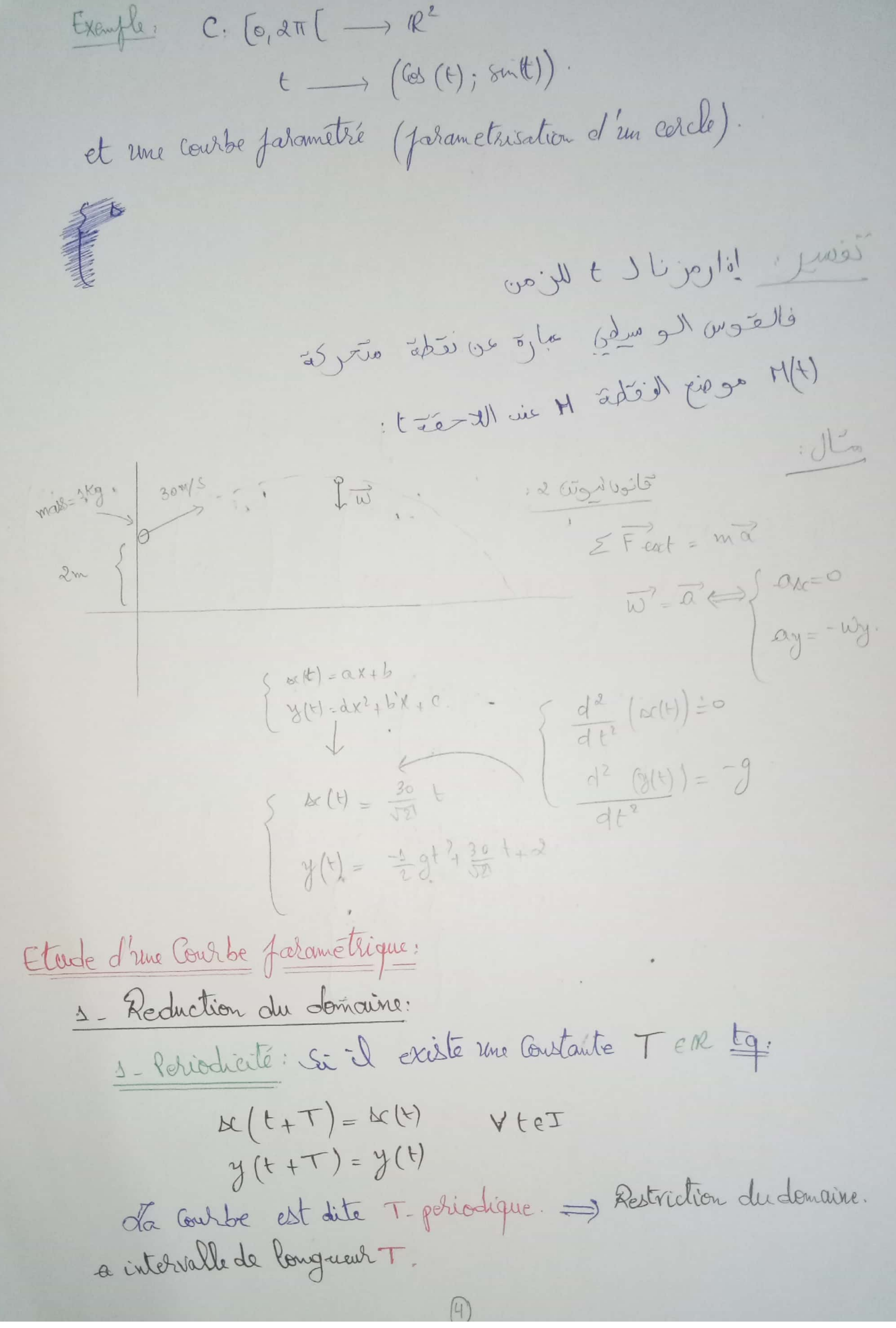
Chapitre 2 : Les Courbe paramétrique :

Déf : Une Courbe paramétrée est une fonction vectoriel.

$$C : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{ou } \mathbb{R}^n)$$
$$t \longrightarrow C(t) = (x(t) ; y(t))$$

I : Domaine de définition de C.

$\Gamma = \{ C(t) = (x(t) ; y(t)) \;/\; t \in I \}$ La Courbe associer à C (graphe).



Exemple : $C : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow (\cos(t) ; \sin(t))$.

et une courbe paramétré (paramétrisation d'un cercle).

تفسير : إذا رمزنا t للزمن

فالقوس الوسيطي عبارة عن نقطة متحركة

M(t) موضع النقطة M عند اللحظة t :

مثال :

قانون نيوتن 2 :

$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{w} = \vec{a} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -w_y . \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = ax + b \\ y(t) = dx^2 + b'x + c . \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(x(t)) = 0 \\ \frac{d^2 (y(t))}{dt^2} = -g \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = \frac{30}{\sqrt{2}} t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{30}{\sqrt{2}} t + 2 \end{cases}$

Etude d'une Courbe paramétrique :

1 - Reduction du domaine :

1 - Periodicité : Si il existe une constante $T \in \mathbb{R}$ tq :

$x(t+T) = x(t) \quad \forall t \in I$

$y(t+T) = y(t)$

La courbe est dite T-periodique. $\Longrightarrow$ Restriction du domaine. a intervalle de longueur T.

(نقتصر الدراسة على مجال طوله T).

Exemple: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow (\cos(t) ; \sin(t))$.

On a: $T = 2\pi$ $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t). \end{cases}$

$D_{d'étude} = [0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$ ou $[-2\pi, 0]$ - - - -

La symétrie: Si il existe un fonction $g: I \longrightarrow I$

tq: $\begin{cases} x(g(t)) = \\ y(g(t)) = \end{cases} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$.

(المنحنى يتكرر) (تناظر بالنسبة لمحور التراتيب) (لمحور الفواصل) (للمبدأ)

ou $\begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix}$.

(المنصف الأول) (المنصف الثاني)

La Courbe admet une Symétrie. Si $I = [a, b]$ alors:

$g(t) = $ → $a + b - t$ (حدود المجال) ; → $-t$; → $\frac{1}{t}$; → $t + T$ (دورية)

{ تناظر }

Exemple: 1) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = -y(t) \end{cases}$

C يتمتع بالتناظر بالنسبة لمحور الفواصل لأن:

$\begin{cases} x(-t) = (-t)^2 + 1 = x(t) \\ y(-t) = (-t)^3 = -y(t). \end{cases}$

$\Longrightarrow I_{étude} = [0, +\infty[$.

2)

$$C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longrightarrow \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

* C est 2π- periodique $\Longrightarrow I_1 = [-\pi, \pi]$.

* $\begin{cases} x(-t) = \cos(-t) = +x(t) \\ y(-t) = \sin(-t) = -y(t) \end{cases}$ C متناظر بالنسبة لمحور الفواصل.

$$\Longrightarrow I_2 = [-\pi, \pi] \cap \left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right[$$

$$= [-\pi, \pi] \cap [0, +\infty[= [0, \pi[$$

* $\begin{cases} x(\pi - t) = \cos(\pi - t) = -\cos(t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin(t) = y(t) \end{cases}$ C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

$$\Longrightarrow I_3 = [0, \pi] \cap \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[= \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ ou } I_3 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

* $\begin{cases} x(\pi/2 - t) = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t) = x(t) \end{cases}$ C متناظر بالنسبة للمنصف الأول.

$$I_{etude} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$